

**УРАЛЬСКИЙ ФИЛИАЛ**  
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

**«РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ ЖИВОПИСИ, ВАЯНИЯ И ЗОДЧЕСТВА  
ИЛЬИ ГЛАЗУНОВА»**

Кафедра дизайна архитектурной среды

## **МАТЕМАТИКА**

*Контрольные вопросы и задания  
по математическому анализу*

Пермь

2016



## СОДЕРЖАНИЕ

Пояснительная записка.....	4
Тема 1: Понятие функции.....	5
Тема 2: Предел последовательности.....	6
Тема 3: Предел функции.....	7
Тема 4: Производная.....	8
Тема 5: Применение производной к задачам геометрии и механики.....	10
Тема 6: Производные и дифференциалы высших порядков.....	11
Тема 7: Исследование функций.....	12
Тема 8: Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталю.....	13
Тема 9: Неопределенный интеграл.....	14
Тема 10: Определенный интеграл.....	15
Тема 11: Вычисление площадей плоских фигур.....	16
Тема 12: Несобственные интегралы.....	16
Тема 13: Дифференциальные уравнения первого порядка.....	17
Тема 14: Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.....	18
Список литературы.....	19

### *Пояснительная записка*

Предлагается набор заданий практического характера по основным разделам, обозначенным в программе учебной дисциплины «Математика» для студентов направления 07.03.03 «Дизайн архитектурной среды» с квалификацией (степенью) выпускника «академический бакалавр» и относящимся к курсу математического анализа. Успешное выполнение предложенных заданий может быть достигнуто на основе изучения теории по конспектам лекций и по названной в заключительной части данного издания учебной литературе.

Практикуму придана структура рекомендаций по отработке алгоритмов решения типовых задач в аудиторной и домашней работе. Причем задачи подобраны таким образом, что аудиторные и домашние задания имеют достаточно большую степень аналогии, что позволяет, повторив изученное на лекциях и практических занятиях, самостоятельно закрепить полученные навыки.

Для организации учебной работы каждую тему предваряет небольшой перечень контрольных вопросов, призванный сосредоточить внимание на необходимых при выполнении заданий наиболее важных аспектах теории. Рекомендуется выполнение домашних заданий начинать с повторения теоретических сведений и самостоятельного ответа на предложенные вопросы.

## Тема 1: ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

### Вопросы

1. Что называется функцией? Приведите примеры функций.
2. Что такое область определения и множество значений функции?
3. Какие функции называют четными, какие – нечетными?
4. Какая функция называется периодической?
5. Что называют графиком функции  $y=f(x)$ ?

### Задания

1. Найти область определения функции:

1)  $y = \frac{\lg(1+x)}{x-1}$ ;

2)  $y = \sqrt{1-2x} + 3 \arcsin \frac{3x-1}{2}$ ;

3)  $y = \frac{2x-1}{x^2-3x+2}$ ;

4)  $y = \sqrt{\frac{x}{2-x}} - \sqrt{\sin x}$ .

2. Определить, какая из заданных функций четная, какая – нечетная:

1)  $y = 2^{-x^2}$ ;

2)  $y = x^4 - 2x^2$ ;

3)  $y = \sin x - \cos x$ ;

4)  $y = 2 \operatorname{ctg} x - \frac{1}{x^3}$ .

3. Построить график функции:

1)  $y = \cos 2x$ ;

2)  $y = 3 \sin x$ ;

3)  $y = |\sin x|$ ;

4)  $y = \frac{1}{x-3} + 5$ .

4. Доказать, что функция  $y = \frac{1}{3} \sin(2+7x)$  — периодическая.

### Домашнее задание

1. Найти область определения функции:

1)  $y = \log_2(x^2 + 4x + 5)$ ;

- 2)  $y = \sqrt{3x^2 - x} + \arccos(2x + 1)$ ;
- 3)  $y = \frac{7x - 2}{x^2 - 10x + 9}$ .
2. Построить график функции:
- 1)  $y = 2^{3x}$ ;
  - 2)  $y = 4 \lg x$ ;
  - 3)  $y = |3 \cos x|$ ;
  - 4)  $y = \frac{1}{x^2 + 1} - 3$ .
3. Исследовать функцию на четность и нечетность:
- 1)  $y = x^7 + x^5 - x^3 + 3x$ ;
  - 2)  $y = \cos x + 5x^4$ ;
  - 3)  $y = \operatorname{tg} x - (\operatorname{ctg} x)^3$ .
4. Определить период функции
- 1)  $y = \cos 3x$ ;
  - 2)  $y = 2 \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} \right)$ .

## Тема 2: ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

### Вопросы

1. Что называют числовой последовательностью? Приведите примеры последовательностей.
2. Какие последовательности называют монотонно возрастающими, и какие – монотонно убывающими?
3. Что называют пределом последовательности?
4. Каковы свойства предела последовательности?
5. Какие последовательности изучались в школьном курсе математики?

### Задания

1. Выписать пять первых членов последовательности  $x_n = \frac{1 + (-1)^n}{n^2}$ .
2. Найти пределы последовательностей:
  - 1)  $u_n = \frac{n^2}{2n^2 + 1} + \frac{\sqrt{n} + 2}{n + 3}$ ;
  - 2)  $u_n = \frac{\sqrt{n} + 2}{n + 3}$ ;
  - 3)  $u_n = \frac{1}{2n} + \frac{2n}{3n + 1}$ ;
  - 4)  $u_n = \frac{3n^3 - 4}{n^2 + 6}$ .

### Домашнее задание

1. Выписать первые три члена последовательности  $x_n = 1 + 3^{-(n+2)^2}$ .
2. Вычислить пределы последовательностей:

- 1)  $u_n = \frac{n}{n+1} + \frac{2n}{9n^2-1}$ ;
- 2)  $u_n = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^4+2n+3}$ ;
- 3)  $u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{2n}{3n+1} \cdot \frac{n}{1-3n}$ .

### Тема 3: ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

#### Вопросы

1. Что называют пределом функции в данной точке?
2. Что называют пределом функции на бесконечности?
3. Каковы свойства предела функции в точке?
4. Какие способы раскрытия неопределенностей используются при вычислении пределов функций?
5. Каковы первый и второй замечательные пределы?

#### Задания

Вычислить пределы:

1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1}$ ;

2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2}{\sqrt{x^8 + 3x + 4}}$ ;

3)  $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^3 - 1000}{x^3 - 20x^2 + 100x}$ ;

4)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}$ ;

5)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$ ;

6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}}{x^2 - x}$ ;

7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$

8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x}$ ;

9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} kx}{x}$ ;

10)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$ ;

11)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ ;

12)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x_0}{x - x_0}$ ;

13)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x}$ ;

14)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x}$ ;

15)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$ ;

$$16) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg}(x^2 - 3x + 2)}{x^2 - 4};$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \left( \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \right);$$

$$18) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{(x+1)^2}{x}};$$

$$19) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{2x+1} \right)^x;$$

$$20) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 1}{x^2} \right)^x.$$

### *Домашнее задание*

Вычислить пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x+2}{2x+3};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x - 4}{5x^2 - 2x - 3}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x})$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2} - 1}{x};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x} - 1};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} mx}{\sin nx};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left( \frac{\pi}{2} - x \right)^2};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x};$$

$$11) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{1+x} \right)^x;$$

$$12) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{3x} \right)^x;$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2-x}{2} \right)^{\frac{1}{x}};$$

$$14) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+2}{3x-1} \right)^{4x-1}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(2(x-1))}{x^2 - 7x + 6};$$

$$16) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(3(x+1))}{x^2 - 4x - 5}.$$

## Тема 4: ПРОИЗВОДНАЯ

### *Вопросы*

1. Что называют производной функции в данной точке?
2. Каковы правила дифференцирования суммы, произведения, частного?
3. Чему равна производная сложной функции?
4. В чем состоит прием логарифмического дифференцирования функций?
5. Как найти производную функции  $y = f(x)$ , заданной неявно?
6. Как найти производную функции  $y = f(x)$ , заданной параметрически уравнениями  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$  ?



7. Что называют дифференциалом функции, и какова его связь с производной?

### Задания

1. Найти производные следующих функций по правилам дифференцирования:

1)  $y = \frac{1}{x^2}$ ;

2)  $y = 5(\operatorname{tg} x - x)$ ;

3)  $y = x^2 \cdot \ell^x$ ;

4)  $y = x^3 \cdot \operatorname{arctg} x$ ;

5)  $y = (2x^3 + 5)^4$ ;

6)  $y = 2^{x^2}$ ;

7)  $y = \sin^3 \frac{x}{3}$ ;

8)  $y = \operatorname{arctg} \frac{\ln x}{2}$ ;

9)  $y = x^{\sin x}$ ;

10)  $y = (x^2 + 1)^{2x-7}$ ;

11)  $2y \ln y = x^3 + 3x - 10$ ;

12)  $x^y = y^x$ ;

13)  $\begin{cases} x = \frac{1+t^3}{t^2-1}; \\ y = \frac{t}{t^4-1} \end{cases}$ ;

14)  $\begin{cases} x = t^3 + 1 \\ y = t^2 + t + 1 \end{cases}$

в точке (1;1);

15)  $\begin{cases} x = \varphi(1 - \sin \varphi); \\ y = \varphi \cos \varphi \end{cases}$ ;

16)  $y = \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ .

2. Найти дифференциалы функций:

1)  $y = \frac{1}{12} \cdot \ln \frac{x-6}{x+6}$ ;

2)  $y = x(\ln x - 1)$ .

### Домашнее задание

1. Найти производные следующих функций по правилам дифференцирования:

1)  $y = \ln(2x^3 + 3x^2)$ ;

2)  $y = \sqrt{1-3x^2}$ ;

3)  $y = \ln \operatorname{tg} \frac{2x+1}{4}$ ;

4)  $y = x \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \sqrt{4-x^2}$ ;

5)  $y = \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ ;

6)  $y = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$ ;

7)  $y = \sin(\ln x) \cdot \cos(\ln x) - \ln \frac{1}{x}$ ;

8)  $y = 2 \ln \cos \frac{x}{2}$ ;

9)  $y = \operatorname{arctg} \ell^{2x}$ ;

10)  $y = x^{x^2+3x-5}$ ;

11)  $y = x^{\frac{x}{\ln^2 x}}$ ;

12)  $y = \ell^x - \sin(\ell^{-x}) \cos(\ell^{-x})$ ;

13)  $y \sin x - \cos(x-y) = 0$ ;

$$14) \quad 2^x + 2^y = 2^{x^2+y^2};$$

$$15) \quad \begin{cases} x = \frac{t+1}{t}; \\ y = \frac{t-1}{t}; \end{cases}$$

$$16) \quad \begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \operatorname{arctg} t \end{cases}.$$

2. Продифференцировать функции:

$$1) \quad y = x^3(\sqrt[4]{x} + 1);$$

$$2) \quad y = 15(x^4 - 1);$$

$$3) \quad y = \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x}};$$

$$4) \quad y = (\sqrt{x} + 5)^3;$$

$$5) \quad y = \sqrt[3]{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}};$$

$$6) \quad y = \frac{12}{x^2 + x + 1};$$

$$7) \quad y = \sqrt{\ln x + 1} + \ln(\sqrt{x} + 1);$$

$$8) \quad y = 5^{x^3} \ln^2 x;$$

$$9) \quad y = \log_2 \frac{(x-2)^5}{(x+3)^2};$$

$$10) \quad y = \ln \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x};$$

$$11) \quad y = \ln^4 \sin x;$$

$$12) \quad y = \frac{1}{x} + \sin x \frac{1}{x};$$

$$13) \quad y^9 + x \cos x - 12x^4 = 0;$$

$$14) \quad \begin{cases} x = \sin(1+t^3) \\ y = \cos(3t^2 - t + 2) \end{cases}.$$

3. Найти дифференциалы функций:

$$1) \quad y = \frac{\sin^2 x}{\sqrt{\cos 2x}};$$

$$2) \quad y = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + \ln \sqrt{x^2 + 3}.$$

## Тема 5: ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ЗАДАЧАМ ГЕОМЕТРИИ И МЕХАНИКИ

### Вопросы

1. Каков геометрический, физический и экономический смысл производной?
2. Какова связь между приращением функции и ее дифференциалом в данной точке?
3. Каковы уравнения касательной и нормали к линии в данной точке?

### Задания

1. Какой угол образует с осью абсцисс касательная к параболе

$y=x^2-3x+5$ , проведенная в точке  $M(2;3)$ ?

2. Составить уравнение касательной к гиперболе  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$  в точке  $(-3,0)$ .
3. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении задана уравнением  $S = \frac{2}{3}t^6 + \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi t}{9}$ . Определите скорость движения в конце третьей секунды.
4. Объем выпускаемой продукции предприятия в ходе рабочего дня изменяется по закону  $V=8t^4-2t^3+6t^2+100$  в зависимости от времени  $t$ . Определить производительность труда в конце третьего часа работы.
5. Найти приращение функции и дифференциал функции  $y=x^3+2x$  в точке  $x=2$  при  $\Delta x = 0,1$ .
6. Вычислить приближенно: а)  $\operatorname{arctg} 0,98$ ; б)  $\sqrt{17}$ ; в)  $\sin 29^\circ$ .

### *Домашнее задание*

1. Какой угол образует касательная к кривой  $y = \frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{9}x^3$ , проведенная в точке с абсциссой  $x=1$ ?
2. Составить уравнение касательной и нормали к цепной линии  $y = \frac{\ell^{\frac{x}{\ell^2}} + \ell^{-\frac{x}{\ell^2}}}{2}$  в точке  $M_0(x_0; y_0)$ , где  $x_0=2\ln 2$ .
3. Зависимость пути от времени задана уравнением  $S=t \ln(t+1)$ , где  $t$  выражено в секундах,  $S$  — в метрах. Найти скорость движения в конце второй секунды.
4. Закон издержек производства в зависимости от объема продукции определяется формулой  $y=20x-0,05x^3$ . Найти предельные издержки при объеме продукции в 10 единиц.
5. Найти приближенно:  
1)  $\operatorname{arctg} 1,05$ ;                                  2)  $\arcsin 0,4983$ .

## **Тема 6: ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ**

### *Вопросы*

1. Что называется производной второго порядка функции в данной точке? Что называют производной  $n$ -го порядка?
2. Что называют дифференциалом второго ( $n$ -го) порядка?
3. Каковы формулы для вычисления  $d^2y$  и  $d^3y$  функции  $y=f(x)$ ?

### *Задания*

1. Найти производную второго порядка от следующих функций:

1)  $y = -\frac{x^2}{x+5}$ ;

4)  $y = \ell^{kx}$ ;

2)  $y = \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 3)$ ;

5)  $y = 2^x + 2^{-x}$ .

3)  $y = (2x+3)^3 \cdot \sqrt{2x+3}$ ;

2. Найти дифференциал второго порядка функции  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 4})$ .

### *Домашнее задание*

1. Найти производную второго порядка функции

1)  $y = x \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \sqrt{x^2 + a^2}$ ;

2)  $y = -\frac{1}{9}x \cdot \sin 3x - \frac{2}{27} \cos 3x$ .

2. Найти производную третьего порядка функции

1)  $y = \frac{1}{2} \ln^2 x$ ;

2)  $y = \frac{x}{6(x+1)}$ .

3. Найти дифференциал второго и третьего порядка функции  $y = x(\ln x - 1)$ .

## **Тема 7: ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ**

### *Вопросы*

1. Каковы условия возрастания (убывания) дифференцируемой функции на промежутке?
2. Каково необходимое условие экстремума дифференцируемой функции?
3. Каковы достаточные условия минимума и максимума дифференцируемой функции в терминах первой и второй производной?
4. Каково условие выпуклости (вогнутости) дифференцируемой функции?
5. Какие известны виды асимптот, и как их найти?

### *Задания*

1. Найти интервалы возрастания и убывания функции:

1)  $y = 2 - 3x + x^3$ ;

2)  $y = x^2 - 1^{\frac{1}{2}}$ .

2. Провести полное исследование и построить график функции:

1)  $y = (x+1)(x-2)^2$ ;

$$2) y = \frac{1}{1-x^2};$$

$$3) y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}.$$

### *Домашнее задание*

1. Найти интервалы возрастания и убывания функции:
  - 1)  $y = x\ell^{-x}$ ;
  - 2)  $y = (2-x)(x+1)^2$ .
2. Провести полное исследование и построить график функции:
  - 1)  $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$ ;
  - 2)  $y = \frac{x^2}{x^2-1}$ ;
  - 3)  $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ .

## **Тема 8: РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ПО ПРАВИЛУ ЛОПИТАЛЯ**

### *Вопросы*

1. Как выглядит краткая запись правила Лопиталья?
2. Какого типа неопределенности можно раскрыть по этому правилу?

### *Задания*

Вычислить пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2\arctg x}{\frac{3}{\ell^x} - 1}.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ell^x - \ell^{-x}}{x \ln(1+x)};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x - \ell^{-x}}$$

### *Домашнее задание*

Вычислить пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ell^{\alpha x} - \cos \alpha x}{\ell^{\beta x} - \cos \beta x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2\arctg x}{\ln(1 + \frac{1}{x})}.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ell^{a\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{\sin bx}};$$

## Тема 9: НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

### Вопросы

1. Какие свойства неопределенного интеграла используют при интегрировании функции?
2. Чему равны первообразные и неопределенные интегралы основных элементарных функций?
3. В чем заключается метод интегрирования по частям в неопределенном интеграле?
4. В чем состоит метод замены переменной в неопределенном интеграле?

### Задания

Найти:

- |   |  |
|---|--|
| 1) $\int x\sqrt{x}dx;$                            | 10) $\int \frac{xdx}{x^2-1};$          |
| 2) $\int \frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx;$  | 11) $\int x \ln x dx;$                 |
| 3) $\int e^{3x} \cdot 3^x dx;$                    | 12) $\int \arcsin x dx;$               |
| 4) $\int tg^2 x dx;$                              | 13) $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+5} dx;$   |
| 5) $\int x \cos x^2 dx;$                          | 14) $\int \frac{dx}{(x-1)^4};$         |
| 6) $\int \sqrt{\sin x} \cdot \cos x dx;$          | 15) $\int \frac{dx}{x^2-6x+18};$       |
| 7) $\int \cos(\sin x) \cdot \cos x dx;$           | 16) $\int \frac{x^2 dx}{x^6+2x^3+3};$  |
| 8) $\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}} dx;$ | 17) $\int \frac{5x+3}{x^2+10x+29} dx.$ |
| 9) $\int x^3(1-2x^4)^3 dx;$                       |  |

### Домашнее задание

Найти:

- |   |  |
|---|--|
| 1) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x}};$               | 6) $\int (ax^2 + b)^{\frac{4}{3}} x dx;$ |
| 2) $\int \frac{2-x^4}{1+x^2} dx;$               | 7) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}};$      |
| 3) $\int (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2 dx;$ | 8) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}};$      |
| 4) $\int (2tgx + 3ctgx)^2 dx;$                  | 9) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-3x^3}};$  |
| 5) $\int \frac{dx}{x \ln x};$                   | 10) $\int (x+1)e^x dx;$                  |
|   | 11) $\int x^2 \ln x dx;$                 |

12)  $\int \frac{dx}{(2x-3)^3};$

15)  $\int \frac{x+1}{5x^2+2x+1} dx.$

13)  $\int \frac{x^3 dx}{x^8+2x^4+7};$

14)  $\int \frac{x-2}{x^2-4x+7} dx;$

## Тема 10: ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

### Вопросы

1. Что называют определенным интегралом?
2. Какова связь его с неопределенным интегралом?
3. Какова формула Ньютона-Лейбница?

### Задания

Вычислить определенные интегралы:

1)  $\int_{-2}^3 (2x^3 + x^2 - 5) dx;$

4)  $\int_0^1 \arcsin x dx;$

2)  $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2+2x+2};$

5)  $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx.$

3)  $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx;$

### Домашнее задание

Вычислить определенные интегралы:

1)  $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 x};$

4)  $\int_1^{\ell} x^2 \ln x dx;$

2)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}};$

5)  $\int_1^5 \sqrt{x-1} dx;$

3)  $\int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}};$

6)  $\int_1^{\ell} \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x} dx.$

## Тема 11: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР

### Вопросы

1. В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла?

2. Как найти объем тела вращения плоской фигуры вокруг оси  $Ox$  ( $Oy$ ) с помощью определенного интеграла?

### Задания

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осями координат, прямой  $x=3$  и параболой  $y=x^2+1$ .
2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $x=y^2$ ,  $y=x^2$ .
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y=x^3$ ,  $y=2x$ ,  $y=x$ .
4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной прямыми:  $x=y^2$ ,  $x=1$ ,  $y=0$ .

### Домашнее задание

1. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями:
  - 1)  $y=x^2$ ,  $y=x$ ;
  - 2)  $y=x^2-2x$ ,  $y-3=0$ .
2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линиями:  $xy=-2$ ,  $x=1$ ,  $x=2$ ,  $y=0$ .

## Тема 12: НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

### Вопросы

1. Какие интегралы называют несобственными интегралами I рода, II рода?
2. Как вычислить такие интегралы?
3. Когда говорят, что интеграл сходится (расходится)?

### Задания

Вычислить:

$$1) \int_{\ell}^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx;$$

$$3) \int_{-1}^0 \frac{1}{(1+x)^2} dx;$$

$$2) \int_{-\infty}^2 \frac{1}{x^3} dx;$$

$$4) \int_0^{\ell} \ln x dx.$$

### Домашнее задание

Вычислить:

$$1) \int_{\ell^2}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2};$$

$$3) \int_{-1}^2 \frac{x^2}{x^3+1} dx;$$

$$2) \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx;$$

$$4) \int_1^2 \frac{dx}{x-2}.$$



## Тема 13: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

### Вопросы

1. Что называют дифференциальным уравнением, его порядком и решением?
2. Как решить уравнение с разделяющимися переменными?
3. Какое решение дифференциального уравнения называют общим, частным?
4. Какое уравнение называют однородным уравнением первого порядка и в чем суть способа его решения?
5. Как решить линейное дифференциальное уравнение первого порядка?
6. Как решить уравнение Бернулли?

### Задания

Решить дифференциальные уравнения:

- |  |   |
|--|---|
| 1) $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0;$                | 8) $x\frac{dy}{dx} + y = 3;$  |
| 2) $\frac{y}{y'} = \ln y; (y)=1;$                          | 9) $y' + x^2y = x^2;$   |
| 3) $\frac{dx}{x(y-1)} + \frac{dy}{y(x+2)} = 0; y(1)=1;$    | 10) $y' + 2y = e^{9x};$   |
| 4) $x(y^6 + 1)dx + y^2(x^4 + 1)dy = 0;$<br>$y(0)=1;$       | 11) $y' + 2xy = x \cdot e^{-x^2};$  |
| 5) $x\frac{dy}{dx} + y = y^2;$                             | 12) $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x;$<br>$y(\ell) = \frac{1}{2}\ell^2;$ |
| 6) $(x^2 + xy + y^2)dx = x^2dy;$                           | 13) $y' = x^3y^3 - xy;$   |
| 7) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}; y(-1) = 0;$ | 14) $y' + y = x\sqrt{y}.$   |

### Домашнее задание

Решить дифференциальные уравнения:

- |  |  |
|--|--|
| 1) $\ln(\cos y)dx + xtydy = 0;$  | 8) $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0;$<br>$y(0) = 1;$                              |
| 2) $\frac{yy'}{x} + e^y = 0, y(1) = 0;$                                      | 9) $xy' - y = x^2 \cos x;$   |
| 3) $y' = 2^{x-y};$   | 10) $y' \sin x - y \cos x = 1;$<br>$y(\frac{\pi}{2}) = 0;$                   |
| 4) $3e^x tgydx + (1 + e^x) \frac{1}{\cos^2 y} dy = 0, y(0) = \frac{\pi}{4};$ | 11) $(1 + x^2)y' + y = \arctg x;$  |
| 5) $(1 + e^{2x})y^2 dy = e^x dx; y(0)=0$                                     | 12) $y' + \frac{n}{x}y = \frac{a}{x^n}, y(1)=0,$<br>$a - \text{постоянная};$ |
| 6) $y' = e^{x+y} + e^{x-y}, y(0) = 0;$                                       |  |
| 7) $y - x\frac{dy}{dx} = x + y\frac{dy}{dx};$                                |  |

13)  $y' + y = xy^3$ ;

14)  $x \frac{dy}{dx} + 2y = x^5 y^2$ .

**Тема 14: ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
ВТОРОГО ПОРЯДКА  
С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

*Вопросы*

1. Какие уравнения называют линейными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами; однородными; неоднородными?
2. Что такое характеристическое уравнение?
3. Каков общий вид решения однородного дифференциального уравнения второго порядка в зависимости от корней характеристического уравнения?
4. Что называют начальными и краевыми условиями?

*Задания*

1. Решить уравнения:
  - 1)  $y'' - y' - 2y = 0$ ;
  - 2)  $y'' + 25y = 0$
  - 3)  $y'' - 4y' + 4y = 0$ ;
  - 4)  $y'' + 5y' + 6y = 0$ ;  $y(0)=1$ ;  $y'(0) = -6$ .
2. Найти частное решение уравнения  $y'' + 9y = 0$ , если заданы краевые условия:  $y(0)=0$ ;  $y(\frac{\pi}{4}) = 1$ .

*Домашнее задание*

Решить уравнения:

- 1)  $y'' - y' = 0$ ;
- 2)  $y'' - 10y' + 25y = 0$ ;
- 3)  $9y'' + y = 0$ ,  $y(\frac{3\pi}{2}) = 2$ ,  $y'(\frac{3\pi}{2}) = 0$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баврин И.И.* Курс высшей математики / И.И. Баврин. – М.: Просвещение, 1992.
2. *Виноградова И.А.* Задачи и упражнения по математическому анализу, кн.1, 2. / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий. – М.: Высшая школа, 2000.
3. Высшая математика для экономистов: учебник для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2002.
4. *Данко П.Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, Я.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. В 2-х частях. – 5-е изд., испр. – М.: Высш. школа, 1999.
5. *Шипачев В.С.* Высшая математика / В.С. Шипачев. – М.: Высшая школа, 1990.